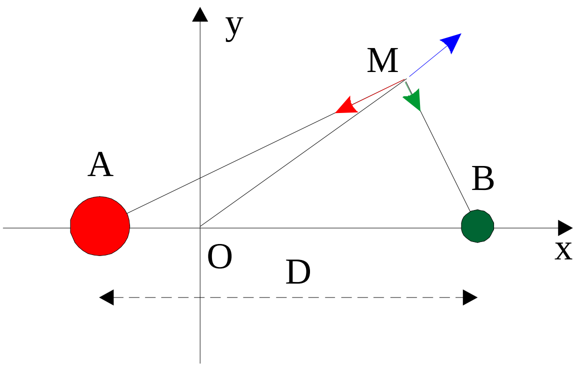
# Points de Lagrange




On considère le système isolé de deux masses ma et mb en interaction gravitationnelle.
On admet pour simplifier qu'ils ont un mouvement circulaire uniforme autour de leur centre d'inertie O.
On pose D = AB, M = ma + mb et ma = α.mb
Les coordonnées de A et B sont [xa, 0] et [xb, 0].
D'après la troisième loi de Kepler leur période de rotation est donnée par :

$$\frac{T^2}{D^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}$$

avec G = Constante de gravitation universelle

Dans ce référentiel tournant à la vitesse angulaire $\omega = \frac{2\pi}{T}$, les deux objets sont immobiles.
On cherche à déterminer s'il existe dans ce repère des positions d'équilibre pour un troisième corps.
Lagrange a montré que si la masse μ du troisième corps était négligeable devant ma et mb que la réponse est positive :
Il existe 5 points convenables nommés « points de Lagrange » L1, L2, L3 L4 et L5.
On note M (x, y) le point matériel de masse μ du plan de l'orbite. Si ce point est en équilibre, il tourne aussi avec la vitesse angulaire ω que l'on peut écrire $\omega = \sqrt{\frac{GM}{D^3}}$ .

M est soumis à la force d'attraction de A $F_A = \frac{G.ma.\mu}{MA^2}$, à la force d'attraction de B $F_B = \frac{G.mb.\mu}{MB^2}$ et comme le repère est non galiléen à une force d'entraînement. Le repère étant en rotation uniforme, cette force se réduit à une force centrifuge (pas de force de Coriolis).

Pour déterminer les positions d'équilibre, on évalue les extremums de l'énergie potentielle de M.

$$E_p = -\frac{G.ma.\mu}{MA} - \frac{G.mb.\mu}{MB} - \frac{\mu\omega^2 OM^2}{2}$$

En utilisant la masse totale M et le rapport α des masses ,il vient :

$$ma = \frac{\alpha M}{1+\alpha},\ mb = \frac{M}{1+\alpha},\ xa = -\frac{D}{1+\alpha}\ \text{ et }\ xb = \frac{\alpha D}{1+\alpha}$$

$$MA = \sqrt{\left(x + \frac{D}{1+\alpha}\right)^2 + y^2} \quad , \quad MB = \sqrt{\left(x - \frac{\alpha D}{1+\alpha}\right)^2 + y^2} \quad , \quad MO = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$Ep = -\left(\frac{\alpha G\mu M}{(1+\alpha)\sqrt{\left(x + \frac{D}{1+\alpha}\right)^2 + y^2}} + \frac{G\mu M}{(1+\alpha)\sqrt{\left(x - \frac{\alpha D}{1+\alpha}\right)^2 + y^2}} + \frac{G\mu M\left(x^2 + y^2\right)}{2D^3}\right)$$