Loi de Poisson

Définitions

Série statistique :
On réalise n expériences successives au cours desquelles on enregistre les valeurs x_1, x_2 …x_k. (par exemple nombre de particules reçues lors de la durée d'un comptage). Si les effectifs (nombre de fois qu'une valeur se réalise) n_1, n_2 … n_k sont variables d'une série de mesure à l'autre alors l'ensemble des valeurs n_i constitue une série statistique de la variable aléatoire discrète x. On a toujours :

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Probabilité, fréquence, mode :
$p_i = n_i/n$ représente la probabilité pour que l'événement x prenne la valeur x_i dans une suite d'expériences. On peut aussi la noter fréquence f_i. Le mode est la valeur la plus probable pour le nombre d'événements.

Distribution de probabilité, histogramme :
L'ensemble des couples (x_i, p_i) est la distribution de probabilité p(x) de la variable x. On la représente graphiquement en traçant pour chaque valeur x_i un segment de hauteur p_i ou f_i. Le graphe est l'histogramme des fréquences.

Espérance mathématique ou moyenne :

L'espérance mathématique de l'événement x est définie par : $E(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i.p_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i.n_i}{n}$

Pour une variable discrète E(x) est analogue à une moyenne et sera notée m ou $\bar{x}$.

Variance , écart type :
La variance est l'espérance mathématique de la grandeur $(x – m)^2$.

$V = E_{(x-m)^2} = \sum_{i=1}^{k} (x_i - m)^2.p_i$ .L'écart type est $\sigma = \sqrt{V}$

Modèles probabilistes

Pour représenter une distribution de probabilité P(x), il existe différents modèles. Ceux de Poisson et de Gauss sont des lois asymptotiques de la loi binomiale.

Loi binomiale :
Soit p la probabilité d'un événement considéré. 1 – p représente la probabilité pour que l'événement ne se réalise pas. La probabilité pour que l'événement se réalise q fois successivement est p^q. Si on réalise n (n>q) mesures successives, la probabilité pour qu'au cours des (n – q) dernières mesures l'événement considéré n'ait pas lieu est donc égale à $(1 – p)^{n – q}$.
$p^q.(1 – p)^{n – q}$ représente la probabilité d'avoir q événements au cours des q premières mesures sur les n effectuées. Il existe C_n^q manières de choisir l'ordre d'apparition des q événements parmi les n mesures et la probabilité de trouver q événements au cours d'une série de n mesures est donc :

$$P_n(q) = C_n^q.p^q(1-p)^{n-q} \text{ (loi binomiale)}$$

L'espérance mathématique est donc :

$$E(q) = \bar{q} = \sum_{q=0}^{n} q.P_n(q) = n.p$$

La variance vaut :

$$V = n\sum_{q=0} (q-m)^2 .P_n(q) = n.p(1-q)$$

Distribution de Poisson :
Si **<u>n est assez grand</u>** et **<u>p assez petit</u>**, l'expression de la loi binomiale devient :

$$P_n(q) = \frac{1}{q!}(np)^q\left(1-\frac{1}{n}\right)..\left(1-\frac{q-1}{n}\right)(1-p)^{n(1-\frac{q}{n})} \approx \frac{(np)^q}{q!}(1-p)^n$$

Or $(1-p)^n = 1 - np + n(n-1)\frac{p^2}{2!} - n(n-1)(n-2)\frac{p^3}{3!} + ... \approx e^{-np}$
Si p << n la loi binomiale s'écrit sous la forme approchée :

$$p_n(q) = \frac{(np)^q}{q!}e^{-np} = \frac{m^q}{q!}e^{-np}$$

En remplaçant q par x,,on obtient la loi de Poisson :

$$\boxed{P(x) = \frac{m^x.e^{-m}}{x!}}$$

Cette courbe est assymétrique par rapport à la droite x = m.

Pour p<<1, l'expression de la variance devient V = np. Elle est égale à la variance et $\sigma = \sqrt{m}$

Loi de Gauss :

Si n devient très grand, on montre que :

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2m}}}$$

qui est une courbe symétrique par rapport à x = m. (courbe en cloche)