

# Mouvements d'un proton dans un champ magnétique et/ou électrique

Dans une enceinte sous vide, on injecte des protons (masse  $m$  et charge  $q$ ) avec une vitesse initiale  $V_0$ . On applique un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B}$  selon la direction Oz et un champ électrique uniforme  $\mathbf{E}$  dans la direction Oy. L'influence de la pesanteur est négligeable devant les autres forces.

L'équation générale du mouvement est donc :  $m \cdot \vec{a} = q \cdot \vec{E} + q \cdot (\vec{V} \wedge \vec{B})$  (k)

## Cas $\mathbf{B} = 0$ .

Par projection de (k) sur les axes, on tire :

$$m \cdot \frac{dV_x}{dt} = 0 \quad m \cdot \frac{dV_y}{dt} = q \cdot E \quad m \cdot \frac{dV_z}{dt} = 0$$

Par intégration comme  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$  et  $z(0) = 0$ , on tire :

$$x = V_{x0} \cdot t \quad y = \frac{q \cdot E}{2 \cdot m} t^2 + V_{y0} \cdot t \quad z = V_{z0} \cdot t$$

## Cas $\mathbf{B} \neq 0$ .

Par projection de (k) sur les axes, on tire :

$$m \frac{dV_x}{dt} = q \cdot B \cdot V_y \quad (1)$$

$$m \frac{dV_y}{dt} = -q \cdot B \cdot V_x + q \cdot E \quad (2)$$

$$m \frac{dV_z}{dt} = 0 \quad (3)$$

L'intégration de (3) est immédiate est donne  $z = V_{z0} \cdot t$

Pour l'intégration de (1) et (2) on pose  $\omega = \frac{q \cdot B}{m}$  et  $V = V_x + i \cdot V_y$ . ( $i^2 = -1$ )

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} (V_x + i V_y) = \frac{q \cdot B}{m} (V_y - i V_x) + i \frac{q \cdot E}{m}$$

$$\frac{dV}{dt} + i \cdot \omega \cdot V = i \frac{q \cdot E}{m}$$

La solution est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation sans second membre :  $V = V_0 \cdot e^{-i\omega t} + \frac{E}{B}$

Les conditions initiales sont :  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$  et  $z(0) = 0$  ;  $V_x(0) = V_{x0}$  et  $V_y(0) = V_{y0}$ .

$$V = \left( V_{x0} - \frac{E}{B} + i V_{y0} \right) (\cos(\omega t) - i \cdot \sin(\omega t)) + \frac{E}{B}$$

$$V_x = \left( V_{x0} - \frac{E}{B} \right) \cos(\omega t) + V_{y0} \cdot \sin(\omega t) + \frac{E}{B}$$

$$V_y = V_{y0} \cdot \cos(\omega t) - \left( V_{x0} - \frac{E}{B} \right) \cdot \sin(\omega t)$$

Une dernière intégration donne :

$$x = \frac{E}{B} \cdot t + \frac{1}{\omega} \left( V_{x0} - \frac{E}{B} \right) \sin(\omega t) + \frac{1}{\omega} V_{y0} \cdot (1 - \cos(\omega t))$$

$$y = \frac{1}{\omega} \left( V_{x0} - \frac{E}{B} \right) \cdot (\cos(\omega t) - 1) + \frac{1}{\omega} V_{y0} \cdot \sin(\omega t)$$