Oscillations amorties

Pour cette étude, on considère un pendule de torsion de moment d'inertie I ; la constante de torsion du fil est C. Pour ce type de pendule, on sait traiter analytiquement le cas du frottement visqueux et celui du frottement solide.

Frottement visqueux

Le moment des forces de frottement est proportionnel à la vitesse angulaire et de signe opposé.

L'équation du mouvement est : $I\frac{d^2\theta}{dt^2}+F\frac{d\theta}{dt}+C\theta=0$.

L'équation caractéristique de cette équation est : $Ir^2+Fr+C=0$.

On pose λ =F/2I et ω_0^2 = C/I.

L'équation caractéristique devient : $r^2+2\lambda r+\omega_0^2=0$.

Selon le signe du discriminant $\Delta=4(\lambda^2-\omega_0^2)$ trois cas sont à envisager.

Mouvement oscillatoire amorti :

Ce cas correspond aux faibles amortissement ($0 < \lambda < \omega_0$.)

On pose : $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$

L'équation caractéristique admet les deux racines complexes :

$$r_1=-\lambda+i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}=-\lambda+i\omega \quad \text{et} \quad r_2=-\lambda-i\omega$$

La solution générale peut s'écrire sous la forme : $\theta=Ae^{-\lambda t}.\cos(\omega t-\varphi)$

A et φ sont deux constantes fonction des conditions initiales.

Le mouvement est oscillant amorti. La durée qui sépare deux passages successifs du pendule par sa position d'équilibre dans le même sens est la pseudo-période $\mathbf{T = 2\pi/\omega}$ du pendule.

Cette pseudo-période est fonction de l'amortissement mais l'effet n'est sensible que pour des valeurs de l'amortissement qui donne une diminution rapide de l'amplitude.

Le rapport entre deux élongations maximum successives dans le même sens est constant est égal à $e^{\lambda T}$.

Mouvement apériodique

Ce cas correspond aux forts amortissement ($\lambda > \omega_0$.)

L'équation caractéristique admet les deux racines réelles négatives :

$$r_1=-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2} \quad \text{et} \quad r_2=-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$$

La solution générale peut s'écrire sous la forme : $\theta=Ae^{r_1t}+Be^{r_2t}$.

A et B sont deux constantes fonction des conditions initiales.

Comme r_2 est plus petit que r_1, le terme en r_2t décroît plus vite et au bout d'un certain temps la variation de l'angle varie comme Ae^{r_1t}. Le retour à la position d'équilibre est d'autant plus lent que l'amortissement est fort.

Amortissement critique

Ce cas correspond au discriminant nul. ($\lambda = \omega_0$).

L'équation caractéristique admet la racine double r = λ

La solution générale peut s'écrire sous la forme : $\theta=(At+B)e^{-\lambda t}$

A et B sont deux constantes fonction des conditions initiales.

Comme θ est une fonction décroissante, le pendule revient à sa position d'équilibre sans la dépasser. Ce retour est toujours plus rapide que pour un mouvement apériodique.

Frottement solide

Le moment des forces de frottement est constant et de signe opposé à la vitesse angulaire

L'équation du mouvement est : $I\frac{d^2\theta}{dt^2}+C\theta+\varepsilon F=0$ $\quad \varepsilon=+1 \text{ si } \frac{d\theta}{dt}<0$; $\varepsilon=-1 \text{ si } \frac{d\theta}{dt}>0$

On pose $\omega^2 = C/I$ et $F = C\theta_f$. (θ_f est une constante ayant la dimension d'un angle).

L'équation du mouvement devient : $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta+\varepsilon\omega^2\theta_f=0$

On tord le fil de l'angle θ_0 et on lâche le pendule sans vitesse initiale. La vitesse angulaire croît et l'équation du mouvement est : $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2(\theta-\theta_f)=0 \quad \Rightarrow \frac{d^2(\theta-\theta_f)}{dt^2}+\omega^2(\theta-\theta_f)=0$

La solution est $\theta=\theta_f+A\cos(\omega t-\varphi)\Rightarrow\frac{d\theta}{dt}=-A\omega\sin(\omega t-\varphi)$

En t = 0, la vitesse angulaire étant nulle φ est nul.
En t = 0 $\theta = \theta_0 \Rightarrow \theta_0 = \theta_f + A$

Finalement $\theta=\theta_f+(\theta_0-\theta_f)\cos(\omega t)\Rightarrow\frac{d\theta}{dt}=-(\theta_0-\theta_f)\omega\sin(\omega t)$

Le pendule s'arrête quand la vitesse s'annule soit pour $\omega t = \pi$.
Cet instant est choisi comme nouvelle origine des temps.
L'angle de rotation vaut alors $\theta_1 = -\theta_0 + 2\theta_f$.
Le pendule repart avec une vitesse négative.

L'équation du mouvement devient : $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2(\theta+\theta_f)=0$

La solution est $\theta=-\theta_f+A\cos(\omega t-\varphi)\Rightarrow\frac{d\theta}{dt}=-A\omega\sin(\omega t-\varphi)$

En t = 0, la vitesse angulaire étant nulle φ est nul.
En t = 0 $\theta = \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = -\theta_f + A$
Finalement $\theta=-\theta_f-(\theta_0-3\theta_f)\cos(\omega t)$

Le pendule s'arrêtera à nouveau pour $\omega t = \pi$. L'angle de rotation vaut alors $\theta_2 = \theta_0 - 4\theta_f$.
Le mouvement est une succession de demi-sinusoïdes de période constante $T = 2\pi/\omega$ non centrées sur l'origine .
L'amplitude des oscillations du pendule décroît linéairement, l'écart sur une « période » étant égal à $\Delta\theta = 4\theta_f = 4F/C$.
Le pendule s'arrête quand le couple de rappel (fonction de l'amplitude) devient inférieur au couple de frottement (constant).
La position finale n'est pas nécessairement la position d'équilibre. Elle dépend fortement des conditions initiales. C'est pourquoi il faut au maximum éliminer les frottements solides dans les instruments de mesure.