Oscillations d'une poutre

On considère une poutre rectangulaire d'épaisseur e, de largeur l et de longueur L. Soit S la section, µ la masse volumique, E le module d'Young et I = $l.e^3/12$ l'inertie de la section droite de la poutre dans la direction de la largeur. On démontre (voir par exemple : Vibrations des milieux continus Jean-Louis Guyader (Hermes)) que l'amplitude Y(x,t) du déplacement transversal d'une section droite de la poutre est donné, si on néglige l'amortissement par l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + \frac{\mu.S}{E.I}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + K\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0$$

La méthode de séparation des variables montre qu'il existe (pour K < 0) des solutions de la forme :

$$Y(x,t) = y(x).\cos(\omega t)$$

L'équation devient : $\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} - K\omega^2 Y = 0$

Les racines de l'équation caractéristique $r^4 - k^4 = 0$. ($k = \left(K.\omega^2\right)^{0.25}$ = nombre d'onde)

Sont : r = k, r = -k, r = ik, et r = -ik.

La solution générale est : $y(x) = C_1 e^{k.x} + C_2 e^{-k.x} + C_3 e^{i.k.x} + C_4 e^{-i.k.x}$

Ou encore

$$y(x) = A_1 sh(kx) + A_2 ch(kx) + A_3 \sin(kx) + A_4 \cos(kx)$$

Conditions aux limites :

1)Encastré-encastré

Dans ce cas pour x = 0 et pour x = L, on a y(x) = 0 et dy/dx = 0

Soit pour x = 0 : $A_1 + A_3 = 0$ et $A_2 + A_4 = 0$

Et pour x = L : $A_1\left(sh(kL) - \sin(kL)\right) + A_2\left(ch(kL) - \cos(kL)\right) = 0$
$A_1\left(ch(kL) - \cos(kL)\right) + A_2\left(sh(kL) + \sin(kL)\right) = 0$

Ces deux équations conduisent à une équation transcendante en kL :

$$\left(sh(kL) - \sin(kL)\right).\left(sh(kL) + \sin(kL)\right) - \left(ch(kL) - \cos(kL)\right)^2 = 0$$

La résolution numérique (par exemple par la méthode de dichotomie) de cette équation donne pour les 5 premières solutions :

R(1) = 4,7300 ; R(2) = 7,8532 ; R(3) = 10,9956 ; R(4) = 14,1317 ; R(5) = 17,2787.

On en déduit les valeurs des fréquences des modes propres :

$$f_n = \frac{R_n^2}{2\pi}\sqrt{\frac{E.I}{\mu.S.L^4}} = B_n\sqrt{\frac{E.I}{\mu.S.L^4}}\ .$$

Si l'on pose $U = \frac{sh(k_n L) - \sin(k_n L)}{ch(k_n L) - \cos(k_n L)} U$

L'expression de l'amplitude transversale du mode n devient :

$$y_n(x) = C\left(\left(sh(k_n x) - \sin(k_n x)\right) - U.\left(ch(k_n x) - \cos(k_n x)\right)\right)$$

2)Encastré-libre

Dans ce cas pour x = 0, on a y(x) = 0 et dy/dx = 0.

Pour x = L , on a $d^2y/dx^2 = 0$ et $d^3y/dx^3 = 0$.

Pour la justification de la nullité du moment fléchissant et de l'effort tranchant pour l'extrémité libre consulter par exemple le manuel déjà cité en référence.
Un calcul analogue au précédent conduit cette fois à l' équation transcendante en kL :

$$\mathrm{ch}(kL).\cos(kL) + 1 = 0$$

La résolution numérique de cette équation donne pour les 5 premières solutions :

R(1) = 1,8751 ; R(2) = 4,6941 ; R(3) = 7,8547 ; R(4) = 10,9955 ; R(5) = 14,1372.

On en déduit les valeurs des fréquences des modes propres :

$$f_n = \frac{R_n^2}{2\pi}\sqrt{\frac{E.I}{\mu.S.L^4}} = B_n\sqrt{\frac{E.I}{\mu.S.L^4}}\ .$$

Si l'on pose $U = \frac{\mathrm{sh}(k_nL)+\sin(k_nL)}{\mathrm{ch}(k_nL)+\cos(k_nL)}$ U

L'expression de l'amplitude transversale du mode n est :

$$y_n(x) = C\left(\left(\mathrm{sh}(k_nx)-\sin(k_nx)\right)-U.\left(\mathrm{ch}(k_nx)-\cos(k_nx)\right)\right)$$