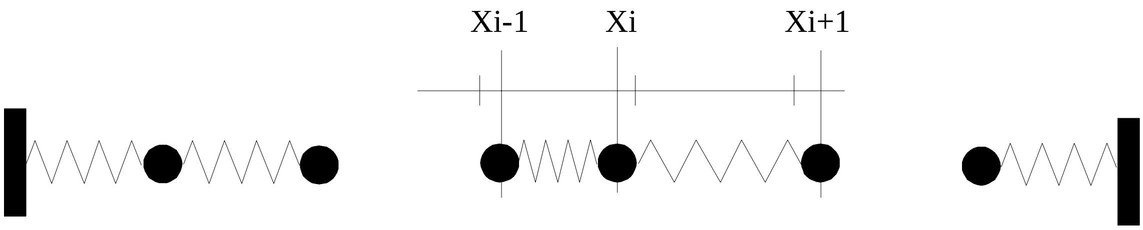
Chaîne linéaire d'oscillateurs

On considère une chaîne de N masses identiques équidistantes au repos et reliées par des ressorts identiques. Soient **m** la masse, **k** la raideur des ressorts et **a** la distance entre deux masses.



Équations du mouvement

Chaque masse m_i est écartée de sa position d'équilibre de la quantité x_i. elle est soumise à l'action des ressorts reliés aux masses m_{i-1} et m_{i+1}.
L'équation du mouvement de la masse m_i est donc :

$$m.\ddot{x}_i + k(x_i - x_{i-1}) - k(x_{i+1} - x_i) \Rightarrow \ddot{x}_i = -\frac{k}{m}(x_i - x_{i-1}) + \frac{k}{m}(x_{i+1} - x_i)$$

Pour la première masse, on a : $\ddot{x}_1 = -\frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1)$

Et pour la dernière : $\ddot{x}_N = -\frac{k}{m}(x_N - x_{N-1}) - \frac{k}{m}x_N$

On pose C = k/m $=\omega_0^2$.
ω_0 est la pulsation d'un oscillateur isolé.
La solution est de la forme $x_i = A_i \cos(\omega t - \varphi_i)$

Si on suppose que la vitesse initiale de toutes les masses est nulle la solution est : $x_i = A_i \cos(\omega t)$

Et donc : $\ddot{x}_i = -\omega^2 A_i \cos(\omega t)$.

On obtient un système d'équations que l'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 2C & -C & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -C & 2C & -C & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -C & 2C & -C & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -C & 2C & -C \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -C & 2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \\ \\ A_{N-1} \\ A_N \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \\ \\ A_{N-1} \\ A_N \end{bmatrix}$$

On peut obtenir les pulsations ω_i des modes propres en recherchant les valeurs propres de ce système.
Les valeurs des amplitudes pour une pulsation propre donnée seront les composantes du vecteur propre correspondant.

La solution sera une combinaison linéaire de tous les modes propres :

$$x_i = A_{1i}\cos(\omega_1 t) + A_{2i}\cos(\omega_2 t) + \cdots + A_{Ni}\cos(\omega_N t)$$

Les valeurs des coefficients A_{ji} sont déterminées à partir des conditions initiales.

Pour les petites valeurs de N, la recherche des valeurs propres peut être faite manuellement. Pour les valeurs plus grandes, il faut envisager une diagonalisation numérique.

Étude du cas N=3

La forme matricielle du système est :

$$\begin{bmatrix} 2C & -C & 0 \\ -C & 2C & 0 \\ 0 & -C & 2C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

La solution est :

Valeurs propres ω^2	Vecteurs propres
$2C\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	A_{11}, $\sqrt{2}A_{11}$, A_{11}
$2C = 2k/m = 2\omega_0^2$	A_{12}, 0, $-A_{12}$
$2C\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	A_{13}, $-\sqrt{2}A_{13}$, A_{13}

Les valeurs de A_{11}, A_{12} et A_{13} sont déterminées à partir des conditions initiales.

Relation de dispersion

Le mouvement de la masse i est régi par : $\ddot{x}_i = -\dfrac{k}{m}(x_i - x_{i-1}) + \dfrac{k}{m}(x_{i+1} - x_i)$

Si le système vibre sur un mode propre, la solution est $x_i = A_i \cos(\omega t)$

En introduisant cette valeur dans l'équation différentielle, on tire une relation de récurrence entre les amplitudes : $A_{i+1} + A_{i-1} = A_i\left(2 - \dfrac{m}{k}\omega^2\right)$

On cherche des solutions de la forme $A_i = \sin\dfrac{pi\pi}{N+1}$ avec p entier $0 < p < N+1$

Ces solutions respectent les conditions aux limites $A_0 = A_{N+1} = 0$

On a donc : $\sin\dfrac{(p+1)i\pi}{N+1} + \sin\dfrac{(p-1)i\pi}{N+1} = \sin\dfrac{pi\pi}{N+1}\left(2 - \dfrac{m}{k}\omega^2\right)$

Après simplification on tire : $4\sin^2\dfrac{p\pi}{N+1} = \dfrac{m}{k}\omega^2 = \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Ou encore :

$$\boxed{\omega = 2\omega_0 \sin\frac{p\pi}{N+1}}$$

La longueur totale de la chaîne d'oscillateurs est L = (N + 1)a.

On définit une longueur d'onde $\lambda = 2(N + 1)a/p$ et un nombre d'onde $K = 2\pi / \lambda = p\pi/(N + 1)a$

La relation de dispersion devient :

$$\boxed{\omega = 2\omega_0 \sin\frac{Ka}{2}}$$

Remarques : On peut, au lieu de chercher les valeurs propres de la matrice du système, utiliser la relation de dispersion pour obtenir les pulsations propres mais cette méthode ne donne pas les valeurs des amplitudes.

Ainsi pour N = 3 les valeurs de Ka qui correspondent aux positions des masses au repos sont $\pi/4$, $\pi/2$ et $3\pi/4$. On en déduit que les pulsations propres sont $0{,}7653\omega_0$, $1{,}414\omega_0$, $1{,}8477\omega_0$.

Les pulsations propres sont comprises entre 0 et $2\omega_0$.