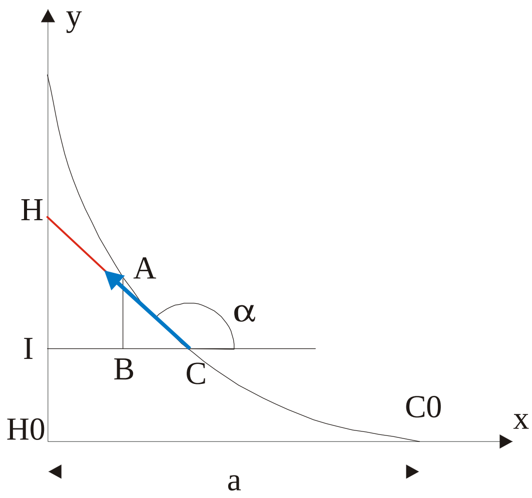
Courbe du chien

Un homme se déplace le long de Oy avec la vitesse constante v_h. Pour le rattraper, son chien placé initialement en C_0 sur Ox ($H_0C_0 = a$) court vers lui avec la vitesse constante v_c. *Le vecteur vitesse est dirigé en permanence vers le maître du chien.*



Mise en équation

Soient x et y les coordonnées de C.

$HI = v_h t - y = -IC.\mathrm{tg}\,\alpha$.

Par hypothèse la vitesse est tangente à la trajectoire : $\mathrm{tg}\,\alpha = y'$

Soit : $v_h t - y = -xy'$ (1)

Dans le triangle ABC $\cos\alpha = BC/AC = dx/ds$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{ds^2}{dx^2} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$$

$ds^2 = (1 + y'^2)dx^2$; mais $ds/dt = v_c = Cte$

$v_c^2 dt^2 = (1 + y'^2)dx^2$; comme dx est négatif, on tire :

$$(1+y'^2)^{1/2} = -v_c dt/dx \qquad (2)$$

Résolution

On pose $K = v_c/v_h$. On élimine t entre (1) et (2)

$v_h t = y - xy'$ en dérivant, on a : $v_h \frac{dt}{dx} = y' - xy'' - y' = -xy''$

$$(1+y'^2)^{1/2} = -v_c \frac{dt}{dx} = v_c \frac{xy''}{v_h} = Kxy''$$

Pour résoudre cette équation, on pose $y' = -\mathrm{sh}(w)$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dw}\frac{dw}{dx} = -\mathrm{ch}(w)\frac{dw}{dx} \quad \text{mais} : 1 + y'^2 = \mathrm{ch}^2(w) \Rightarrow \mathrm{ch}(w) = -K\mathrm{ch}(w)x\frac{dw}{dx}$$

$$\frac{dx}{x} = -Kdw \quad \Rightarrow \quad x = Ce^{-Kw}$$

Si t = 0, x = a, y'= 0, w = 0 ; donc C = a et $\boxed{x = ae^{-Kw}}$

$dy = y'dx = -\mathrm{sh}(w)dx$. $\qquad dx = -aKe^{-Kw}\,dw$

$dy = aKe^{-Kw}\,\mathrm{sh}(w)dw$

$$dy = \frac{aK}{2}\left[e^{(1-K)w} - e^{-(K+1)w}\right]dw$$

Après intégration, on tire : $\boxed{y = \frac{aK}{2}\left[\frac{e^{-(1+K)w}}{K+1} - \frac{e^{-(K-1)w}}{K-1}\right] + y_0}$

Si t = 0, w = 0 et y = 0 $\Rightarrow y_0 = aK/(K^2 - 1)$.

Pour déterminer t, on remplace x et y par leurs valeurs dans l'équation (1).

$$t = \frac{a}{2v_h}\left[\frac{1 - e^{-(K+1)w}}{K+1} + \frac{1 - e^{-(K-1)w}}{K-1}\right]$$

Pour obtenir la courbe, on fait varier w entre 0 et l'infini.