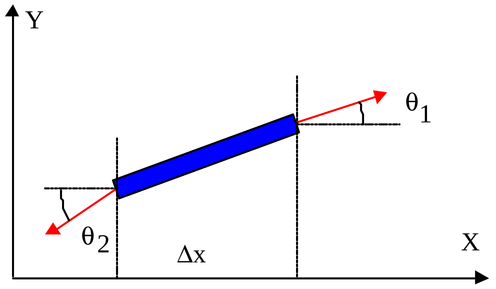
Ondes à une dimension

Étude analytique

On considère une corde de masse linéaire μ, horizontale au repos. A l'instant $t = 0$, on donne à une portion de la corde des déplacements et des vitesses transversales.

On étudie l'évolution et la propagation de cette déformation au cours du temps. Si T est la tension de la corde, la force transversale agissant sur l'élément de longueur Δx est :



$$F_y = T.\sin\theta_2 - T.\sin\theta_1$$

Pour des mouvements de faible amplitude, on peut confondre sinus et tangente :

$$F_y = T\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x1}\right)$$

Un développement au 2^e ordre conduit à :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x1} + \frac{d^2y}{dx^2}\Delta x$$

L'application du principe fondamental de la dynamique au segment Δx donne :

$$F_y = T\frac{d^2y}{dx^2}\Delta x = \mu\Delta x\frac{d^2y}{dt^2}$$

y étant une fonction de x et de t, T/μ ayant la dimension du carré d'une vitesse, cette équation (équation d'onde) s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}$$

Cette équation admet comme solution générale :

$$y(x, t) = f_1(x + vt) + f_2(x - vt)$$

$f_1(x + vt)$ correspond à un déplacement vers la gauche de la perturbation avec une vitesse v. De même $f_2(x - vt)$ correspond à un déplacement vers la droite. Si $f_1(x)$ correspond à la forme de la corde à l'instant $t = 0$, la forme à l'instant t s'obtient en translatant la fonction $f_1(x)$ vers la gauche de la distance vt.

La solution à l'instant t dépend donc des ***conditions initiales*** et aux limites :

En $t = 0$, la forme de la corde est : $y(x, 0) = \varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ (1)

et de plus $$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = v\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{\partial f_2}{\partial t}\right) = v\left(f_1'(x) - f_2'(x)\right) = \phi(x)$$

Par intégration de cette relation, on tire : $\Phi(x) = v(f_1(x) - f_2(x))$ (2)

De (1) et (2), on tire :

$$f_1(x) = ½(\varphi(x) + \Phi(x)/v)$$

$$f_2(x) = ½(\varphi(x) - \Phi(x)/v)$$

La solution générale de l'équation d'onde est donc :

$$y(x, t) = ½[\varphi(x + vt) + \varphi(x - vt) + 1/v(\Phi(x + vt) - \Phi(x - vt))]$$

Cas particuliers :

a) Si en $t = 0$, la corde est immobile alors $\phi(x) = 0$ et : $y(x, t) = ½[\varphi(x + vt) + \varphi(x - vt)]$

b) Si la perturbation se propage dans un seul sens alors $f_1(x) = 0$ ou $f_2(x) = 0$.

Si, par exemple, $f_1(x) = 0$ alors $\varphi(x) = -\Phi(x)/v$ et $\phi(x) = - v.d\varphi(x)/dx$

Résolution numérique

On veut déduire y(x, t + Δt) de y(x ,t). Un développement limité à l'ordre 2 donne :

$$y(x,t+\Delta t) \approx y(x,t) + \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\Delta t^2$$

En tenant compte de l'équation d'onde, on tire :

$$y(x,t+\Delta t) \approx y(x,t) + \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\Delta t + \frac{v^2}{2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\Delta t^2$$

On approxime la dérivée seconde par :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{y(x+\Delta x,t) + y(x-\Delta x,t) - 2y(x,t)}{\Delta x^2}$$

$$y(x,t+\Delta t) \approx y(x,t) + \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\Delta t + \frac{v^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left(y(x+\Delta x,t) + y(x-\Delta x,t) - 2y(x,t)\right)$$

De même :

$$y(x,t-\Delta t) \approx y(x,t) - \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\Delta t + \frac{v^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left(y(x+\Delta x,t) + y(x-\Delta x,t) - 2y(x,t)\right)$$

Soit :

$$y(x,t+\Delta t) + y(x,t-\Delta t) \approx 2y(x,t) + \frac{v^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(y(x+\Delta x,t) + y(x-\Delta x,t) - 2y(x,t)\right)$$

En posant a = v.Δt/Δx, on obtient :

$$y(x,\ t+\Delta t) = 2.y(x,t) + a^2[y(x+\Delta x,t) + y(x-\Delta x,t) - 2y(x,t)] - y(x,t-\Delta t)$$

$$y(x,\ t+\Delta t) = 2.(1-a^2).y(x,t) + a^2[y(x+\Delta x,t) + y(x-\Delta x,t)] - y(x,t-\Delta t)$$

Pour introduire les ***conditions aux limites***, on peut noter que si les deux extrémités de la corde sont fixes alors $y(0) = y(L) = 0$. Si une extrémité est libre alors en cette extrémité $(\partial y/\partial x) = 0$. Pour traduire le fait que la pente de la corde est nulle, il suffit d'écrire que deux segments de corde consécutifs ont le même déplacement.

Étude numérique de la propagation d'une perturbation

La corde de longueur L est découpée en ***n*** *segments identiques* : on peut donc prendre Δx = 1. L'aspect de la corde pourra être représenté par un tableau contenant les ordonnées de chacun des n segments.

On suppose la corde initialement au repos ⇒ $\phi(i) = 0 \quad (0 \le i \le n+1)$

On considère que la déformation initiale est soit une gaussienne centrée sur le segment i_0 de la corde d'équation $\varphi(i) = y(i, 0) = A.\exp[-B(i - i_0)^2] \quad (0 \le i \le n+1)$ soit une déformation en triangle centrée aussi sur i_0.

En t = 1, on calcule l'aspect de la corde qui est donné par la relation :

$$y(i, 1) = \varphi(i) + \phi(i) + \tfrac{1}{2}v^2.[\varphi(i+1) + \varphi(i-1) - 2.\varphi(i)] \quad (1 \le i \le n)$$

On fait ensuite varier le temps en imposant en permanence les conditions aux limites : extrémité gauche fixe {y(0, t) = 0} et y(n, t) = 0 ou y(n, t) = y(n + 1, t) selon que l'extrémité droite de la corde est fixe ou libre.

Pour cela, on écrit que :

$$y(i, t+1) = 2(1 - v^2)y(i, t) + v^2.[y(i+1, t) + y(i-1, t)] - y(i, t-1)$$

La forme de la corde au temps t + 1 est fonction de sa forme aux temps t et t – 1 : il est nécessaire d'utiliser trois tableaux y0(i) pour t – 1, y1(i) pour t et y2(i) pour t + 1. A chaque pas du calcul, les deux premiers tableaux sont actualisés avec les valeurs des deux derniers. y0(i) = y1(i) et y1(i) = y2(i).