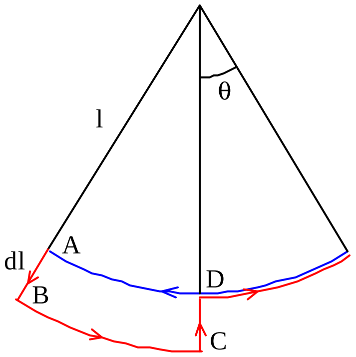
Escarpolette

Application de la notion de moment cinétique



On modélise un enfant debout sur une balançoire par une masse m suspendue par une barre **rigide** de longueur L et de masse négligeable. On désigne par θ l'angle entre la verticale passant par le point O de suspension et la direction de la barre.

Il est possible d'accroître l'amplitude du balancement initial en utilisant la méthode suivante : lors du passage en A (vitesse nulle) l'enfant s'accroupit rapidement (son centre de gravité passe de A en B) ; lorsqu'il passe en C (vitesse maximale), il se redresse brusquement. Si les mouvements AB et CD sont rapides, le moment cinétique ne varie pas entre A et B d'une par et entre C et D d'autre part. On peut donc écrire :

$$J_C = J_D = (L+dL).v_C = L.v_D \quad \Rightarrow \quad v_D = v_C.(L+dL)/L > v_C$$

Son énergie cinétique augmente : l'amplitude maximum de θ va croître.
Si on néglige les frottements, la vitesse maximale est liée à l'amplitude d'oscillation maximale par la relation :

$$v^2 = 2g.L.(1 - \cos\theta_M)$$

On tire en C et D : $1-\cos\theta_0 = \dfrac{v_C^2}{2g(L+dL)}$ et $1-\cos\theta_1 = \dfrac{v_D^2}{2gL}$

Soit pour la première oscillation :

$$\frac{1-\cos\theta_1}{1-\cos\theta_0} = \left(\frac{L+dL}{L}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(\theta_1/2)}{\sin(\theta_0/2)} = \left(\frac{L+dL}{L}\right)^{3/2} = K > 1$$

L'angle de départ étant petit, on a $\sin(\theta_0/2) \approx \theta_0/2 = \alpha$

Donc finalement : $\boxed{\sin(\theta_n/2) = K^n\alpha}$

Ici on n'a pas utilisé cette méthode mais l'intégration numérique par la méthode de Runge-Kutta des équations du mouvement du pendule : $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{\lambda}{mL^2}\dfrac{d\theta}{dt} - \dfrac{g}{L}\sin\theta$ avec une modification de la longueur L entre B et C ($L \Rightarrow L + dL$) et une variation de la vitesse angulaire lors du passage en D : $\dfrac{d\theta}{dt}\left(\dfrac{L+dL}{L}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\theta}{dt}$