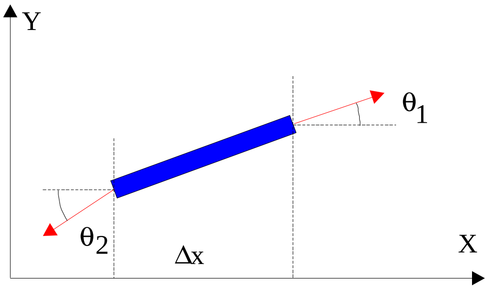
Expérience de Melde

Étude analytique

On considère une corde de masse linéaire μ, horizontale au repos. A l'instant t = 0, on donne à une portion de la corde des déplacements et des vitesses transversales.

On étudie l'évolution et la propagation de cette déformation au cours du temps. Si T est la tension de la corde, la force transversale agissant sur l'élément de longueur Δx est :



$$F_y = T.\sin\theta_2 - T.\sin\theta_1$$

Pour des mouvements de faible amplitude, on peut confondre sinus et tangente :

$$F_y = T\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x1}\right)$$

Un développement au 2e ordre conduit à :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x1} + \frac{d^2y}{dx^2}\Delta x$$

L'application du principe fondamental de la dynamique au segment Δx donne :

$$F_y = T\frac{d^2y}{dx^2}\Delta x = \mu\Delta x\frac{d^2y}{dt^2}$$

y étant une fonction de x et de t, T/μ ayant la dimension du carré d'une vitesse, cette équation (équation d'onde) s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}} \quad (1)$$

Cette équation admet comme solution générale :

$$y(x, t) = f_1(x + vt) + f_2(x - vt)$$

$f_1(x + vt)$ correspond à un déplacement vers la gauche de la perturbation avec une vitesse v. De même $f_2(x - vt)$ correspond à un déplacement vers la droite. Si $f_1(x)$ correspond à la forme de la corde à l'instant t = 0, la forme à l'instant t s'obtient en translatant la fonction $f_1(x)$ vers la gauche de la distance vt. La solution à l'instant t dépend donc des conditions initiales et aux limites.

Oscillations forcées sinusoïdales

Dans ce cas, les conditions aux limites sont : Y(0,t) = Asin(ωt) et Y(L,t) = 0 (extrémité fixe)

On en déduit la solution qui est :

$$Y(x,t) = A\frac{\sin[k(L-x)]}{\sin(kL)}\sin(\omega t) \quad \text{avec } k = \omega/v$$

Soit $\omega_0 = \pi v/L$ la pulsation fondamentale de vibration de la corde.

Quand ω est un multiple entier de ω_0, la corde présente un système de <u>nœuds immobiles</u> et de <u>ventres d'amplitude infinie</u>.

Physiquement cette solution est donc inacceptable.

Pour avoir un système plus réaliste, on peut introduire un frottement de type visqueux dans l'équation d'onde qui devient alors :

$$\boxed{v^2\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + f\frac{\partial y(x,t)}{dt}} \quad (2)$$

Cette équation n'est soluble que numériquement.

Résolution numérique

La corde de longueur L est découpée en ***n*** *segments identiques*. L'aspect de la corde pourra être représenté par un tableau contenant les ordonnées de chacun des n segments

Soit h = L/n le pas spatial et dt le pas temporel. On pose x = i.h et t = j.dt (i et j entiers).

En se limitant au premier ordre, les relations de Taylor donnent pour le point d'abscisse x et à la date t :

$$\partial Y / \partial x = [Y(x+h,t) - Y(x-h,t)] / 2h$$

$$\partial^2 Y / \partial x^2 = [Y(x+h,t) - 2Y(x,t) + Y(x-h,t)] / h^2$$

$$\partial Y / \partial t = [Y(x,t+dt) - Y(x,t-dt)] / 2dt$$

$$\partial^2 Y / \partial t^2 = [Y(x,t+dt) - 2Y(x,t) + Y(x,t-dt)] / dt^2$$

Ces valeurs sont introduites dans la relation (2). Cette équation permet de trouver en tout point x la valeur de Y(x, t) en fonction des valeurs antérieures.
La forme de la corde au temps **t + 1** est fonction de sa forme aux temps **t** et **t – 1** : il est nécessaire d'utiliser trois tableaux **y0(i)** pour t – 1, **y1(i)** pour t et **y2(i)** pour t + 1. A chaque pas du calcul, les deux premiers tableaux sont actualisés avec les valeurs des deux derniers. y0(i) = y1(i) et y1(i) = y2(i) pour $(1 \le i \le n+1)$.
Si l'on pose: a = f.dt/2, b = (1 - a)/(1 + a), e = $(c*dt/h)^2$, l'équation (2) devient :

y2[i] = - y0[i].b + (y1[i + 1] + y1[i - 1]).e/(1 + a) + 2.(1 - e).y1[i]/(1 + a);

On suppose la corde initialement au repos $\Rightarrow$ y2(i) = 0 pour $(1 \le i \le n+1)$.
On fait ensuite varier le temps en imposant en permanence les conditions aux limites : extrémité gauche y(0, t) = A.sin(ω.t) et extrémité droite y(L, t) = 0.

Quand on se rapproche d'une condition de résonance, l'amplitude des ventres croît mais reste finie.
Contrairement au cas sans frottements, on constate qu'il n'existe pas (conformément à l'expérience) de nœuds immobiles. Les nœuds se déplacent de la gauche vers la droite (si le vibreur est situé à gauche).
Ce modèle avec frottement visqueux rend bien compte des phénomènes observés.
Au départ, l'énergie fournie par le vibreur excitateur fait croître l'amplitude des ventres de vibrations et par suite l'énergie dissipée par les frottements. En régime permanent, l'énergie fournie par le vibreur compense exactement l'énergie dissipée par les frottements.